Глава 2

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Систематическое исследование электрических явлений и их практических приложений исторически началось с изучения свойств не изменяющегося во времени тока. Этому способствовали наличие и доступность источников электрической энергии постоянного тока — сначала гальванических элементов (А. Вольта, 1745—1827), позднее аккумуляторов, а также первые успехи применения электричества для освещения (П. Н. Яблочков, 1847—1894), электролиза и гальванопластики (Б. С. Якоби, 1801—1874).

Экспериментальные исследования свойств постоянного тока, проведенные А. М. Ампером (1775—1836), Г. С. Омом (1787—1854), Ш. О. Кулоном (1736—1806) и другими физиками, позволили выявить и обосновать ряд закономерностей и понятий. Дальнейшие исследования, выполненные М. Фарадеем (1791—1867), Э. Х. Ленцем (1804—1865), Д. Генри (1797—1878), Э. В. Сименсом (1816—1892), Д. Джоулем (1818—1889), В. Вебером (1804—1891), Д. К. Максвеллом (1831—1879), Г. Р. Герцем (1857—1894) и другими учеными, показали, что большинство закономерностей, выявленных при анализе цепей постоянного тока, являются фундаментальными законами электротехники.

Электротехническое устройство — это промышленное изделие, предназначенное для выполнения определенной функции при решении комплексной проблемы производства, распределения, контроля, преобразования и использования электрической энергии.

Электротехнические устройства постоянного тока весьма разнообразны, например аккумулятор, линия передачи энергии, амперметр, реостат. Постоянный ток применяется при получении алюминия электрохимическим способом, на городском и железнодорожном электротранспорте, в электронике, медицине и других областях науки и техники.

2.2. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Электрическая цепь, или цепь постоянного тока, в общем случае содержит источники электрической энергии, приемники электрической энергии, измерительные приборы, аппараты автоматики и управления, соединительные линии и провода.

В *источниках электрической энергии* осуществляется преобразование в электрическую энергию каких-либо других форм энергии, например энергии химических процессов в гальванических элементах и аккумуляторах, тепловой энергии в термопреобразователях на основе термопар.

В *приемниках электрической энергии* электрическая энергия преобразуется, например, в механическую (двигатели постоянного тока), тепловую (электрические печи), химическую (электролизные ванны).

Электрические аппараты автоматики и управления, соединительные линии и измерительные приборы служат для передачи электрической энергии от источников, распределения ее между приемниками и контроля режима работы всех электротехнических устройств.

Графическое изображение электрической цепи называется *схемой*. Различают несколько способов изображения цепи. На

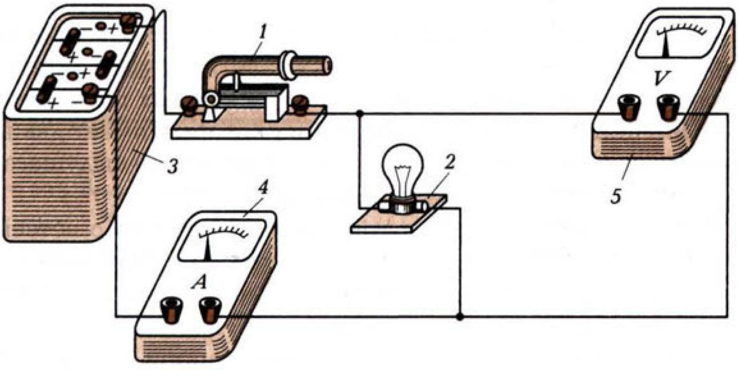


Рис. 2.1

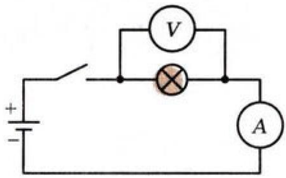


Рис. 2.2

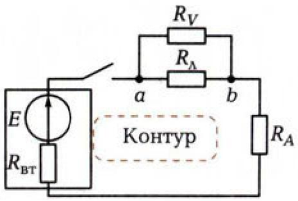


Рис. 2.3

рис. 2.1 в качестве примера приведено эскизное изображение электротехнических устройств и способа их соединения в простейшей цепи постоянного тока. При замыкании рубильника *1* к лампе накаливания *2* — приемнику электрической энергии — подключается источник электрической энергии постоянного тока — аккумуляторная батарея *3*. Для контроля режима работы приемника энергии включены амперметр *4* и вольтметр *5*. Натурное изображение электротехнических устройств и их соединений приводит к громоздким и трудоемким чертежам. Изображение цепи можно упростить, если каждое электротехническое устройство заменить (по ГОСТу) его условным обозначением (рис. 2.2). Такие графические изображения цепей называются *принципиальными схемами*. Принципиальная схема показывает назначение электротехнических устройств и их взаимодействие, но неудобна при расчетах режима работы цепи. Для того чтобы выполнить расчет, необходимо каждое электротехническое устройство представить его схемой замещения.

Схема замещения электрической цепи состоит из совокупности различных идеализированных элементов, выбранных так, чтобы можно было с заданным приближением описать процессы в цепи.

Конфигурация схемы замещения цепи определяется геометрическими (топологическими) понятиями: ветвь, узел, контур.

Ветвь схемы состоит из одного или нескольких последовательно соединенных элементов, каждый из которых имеет два вывода (начало и конец), причем к концу каждого предыдущего элемента присоединяется начало следующего.

В *узле* схемы соединяются три или большее число ветвей.

Контур — замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям так, что ни одна ветвь и ни один узел не встречаются больше одного раза.

Схема замещения (рис. 2.3) цепи, показанной на рис. 2.1, содержит три ветви, причем две состоят из одного элемента каждая, а третья — из трех элементов. На рисунке указаны параметры элементов: $R_Л$ — сопротивление цепи лампы; R_V — сопротивление цепи вольтметра; R_A — сопротивление цепи амперметра; E — ЭДС аккумулятора и $R_{вт}$ — его внутреннее сопротивление. Три ветви соединены в двух узлах a и b.

Если значения параметров всех элементов схемы замещения цепи известны, то, пользуясь законами электротехники, можно рассчитать режим работы всех ее элементов, т.е. определить электрическое состояние всех электротехнических устройств.

В дальнейшем вместо термина *схема замещения электрической цепи* будем пользоваться сокращенными — *схема цепи*, или *схема*.

2.3. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Согласно электронной теории электрической проводимости, валентные электроны в металлах легко отделяются от атомов, которые становятся положительными ионами. Ионы образуют в твердом теле кристаллическую решетку с пространственной периодичностью. Свободные электроны хаотически движутся в пространстве решетки между атомами, сталкиваясь с ними.

Под действием продольного электрического поля напряженностью $\vec{\mathscr{E}}$, создаваемого в проводнике длиной l источником электрической энергии, свободные электроны приобретают добавочную скорость и дополнительно перемещаются в одном направлении вдоль проводника (рис. 2.4).

Постоянный ток в проводящей среде представляет собой в общем случае упорядоченное движение положительных и отрицательных зарядов под воздействием электрического поля. Например, в электролитах и газах ионы с положительными и отрицательными зарядами движутся навстречу друг другу. Так как на-

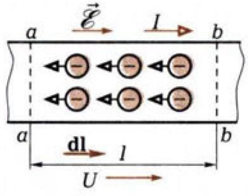


Рис. 2.4

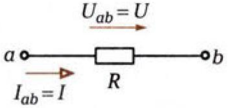


Рис. 2.5

правления движения положительных и отрицательных зарядов противоположны, то необходимо уточнить, движение каких зарядов следует считать направлением тока. Принято считать направлением тока I направление движения положительных зарядов, т.е. направление, обратное направлению движения электронов в проводнике под воздействием электрического поля. Это направление показано стрелкой (см. рис. 2.4).

Постоянный ток определяют по формуле

$$\boxed{I = |q|/t,}$$

где t — время равномерного перемещения суммарного заряда $|q|$ через поперечное сечение рассматриваемого участка цепи.

Основная единица измерения тока в СИ — *ампер* (А): 1 А = 1 Кл/с.

Значение тока в цепи измеряется прибором — амперметром, который включают последовательно, т.е. в разрыв цепи.

При расчете цепи действительные направления токов в ее элементах в общем случае заранее не известны. Поэтому необходимо предварительно выбрать условные положительные, или, короче, положительные, направления токов во всех элементах цепи.

Положительное направление тока в элементе сопротивлением R (рис. 2.5) или в ветви выбирается произвольно и указывается стрелкой. Если при выбранных положительных направлениях токов в результате расчета режима работы цепи значение тока в данном элементе получится положительным, то действительное направление тока совпадает с выбранным положительным. В противном случае действительное направление противоположно выбранному положительному.

Положительное направление напряжения на элементе схемы цепи (см. рис. 2.5) также может быть выбрано произвольно и указывается стрелкой, но для участков цепи, не содержащих источников энергии, рекомендуется выбирать его совпадающим с положительным направлением тока, как на рис. 2.5.

Если выводы элемента обозначены, например, a и b (см. рис. 2.5) и стрелка направлена от вывода a к выводу b, то положительное направление означает, что определяется напряжение

$$\boxed{U = U_{ab} = V_a - V_b.}$$

Аналогичное обозначение можно принять и для тока. Например, обозначение I_{ab} указывает положительное направление тока в элементе цепи или схемы от вывода a к выводу b.

2.4. ЗАКОН ОМА. РЕЗИСТОРЫ И РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Столкновения свободных электронов в проводниках с атомами кристаллической решетки тормозят их поступательное движение. Это противодействие направленному движению свободных электронов, т. е. постоянному току, составляет физическую сущность *электрического сопротивления* проводника. Аналогичен механизм сопротивления постоянному току в электролитах и газах.

На участке цепи сопротивлением R (см. рис. 2.5) зависимость тока от напряжения определяется соотношением

$$\boxed{U_{ab} = RI_{ab},} \quad \text{или} \quad \boxed{U = RI,} \qquad (2.1)$$

называемым *законом Ома*.

Величина, обратная сопротивлению, называется *проводимостью*

$$\boxed{G = 1/R.} \qquad (2.2)$$

Основная единица измерения сопротивления в СИ — *ом* (Ом), проводимости — *сименс* (См).

Проводящее свойство материала определяет его *объемное удельное сопротивление* ρ_V, равное сопротивлению между противоположными сторонами куба с ребром 1 м.

Величина, обратная объемному удельному сопротивлению, называется *объемной удельной проводимостью*

$$\boxed{\gamma_V = 1/\rho_V.} \qquad (2.3)$$

Единица измерения объемного удельного сопротивления — 1 Ом · м, объемной удельной проводимости — 1 См/м.

Сопротивление проводника зависит от его длины, площади поперечного сечения и материала, из которого изготовлен проводник.

Эта зависимость выражается формулой

$$\boxed{R = \rho_V l/S,} \qquad (2.4)$$

где R — сопротивление проводника, Ом; ρ_V — удельное сопротивление, Ом · мм²/м; l — длина проводника, м; S — площадь поперечного сечения проводника, мм².

Сопротивление проводника постоянному току зависит от температуры. Эту зависимость при изменениях температуры в малых пределах (примерно 200 °С) можно выразить формулой

$$R_2 = R_1[1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)], \quad (2.5)$$

где R_1 и R_2 — сопротивления при температурах θ_1, θ_2; α — температурный коэффициент сопротивления, равный относительному изменению сопротивления при изменении температуры на 1 °C.

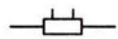
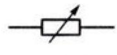
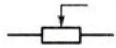
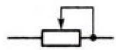
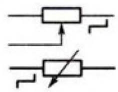
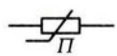
В табл. 2.1 приведены значения объемного удельного сопротивления и температурного коэффициента сопротивления некоторых проводниковых, а в табл. 1.1 — электроизоляционных материалов.

Резистором называется электротехническое устройство, обладающее сопротивлением и применяемое для ограничения тока.

Таблица 2.1. Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления некоторых проводниковых материалов

Материал	Объемное удельное сопротивление при температуре 20 °C, Ом · м	Температурный коэффициент сопротивления (на 1 °C)
Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$	0,0035
Медь техническая	$(1,72—1,82) \cdot 10^{-8}$	0,0041
Алюминий	$2,95 \cdot 10^{-8}$	0,004
Сталь	$(1,25—1,46) \cdot 10^{-7}$	0,0057
Железо	$(0,9—1,1) \cdot 10^{-7}$	0,006
Чугун	$1,5 \cdot 10^{-7}$	0,001
Свинец	$(2,18—2,22) \cdot 10^{-7}$	0,0039
Вольфрам	$0,503 \cdot 10^{-7}$	0,0048
Уголь	$(1—6) \cdot 10^{-7}$	0,005
Манганин (сплав: Cu — 85 %, Mn — 12 %, Ni — 3 %)	$(0,40—0,52) \cdot 10^{-7}$	0,00003
Константан (сплав: Cu — 57—60 %; Ni — 39—41 %; Mn — 1—2 %)	$4,4 \cdot 10^{-7}$	0,00005
Нихром (сплав: Cr — 20 %, Ni — 80 %)	$(1,02—1,120) \cdot 10^{-6}$	0,0001

Таблица 2.2. Условные графические обозначения резисторов

Наименование	Условное обозначение
Постоянный	
С отводами	
Переменный (реостат)	
С разрывом цепи	
Без разрыва цепи	
Переменный (реостат) со ступенчатым регулированием	
Саморегулирующийся нелинейно, например в зависимости от параметра внешней среды *П*	

Регулируемый резистор называется *реостатом*. Условные обозначения различных типов резисторов даны в табл. 2.2.

Резистивными элементами называются идеализированные модели резисторов и любых других электротехнических устройств или их частей, оказывающих сопротивление постоянному току независимо от физической природы этого явления. Они применяются при составлении схем замещения цепей и расчетах их режимов. При идеализации пренебрегают токами через изолирующие покрытия резисторов, каркасы проволочных реостатов и т. п.

Линейный резистивный элемент является схемой замещения любой части электротехнического устройства, в которой ток пропорционален напряжению. Его параметром служит сопротивление R = const.

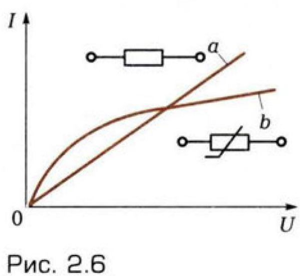


Рис. 2.6

Если зависимость тока от напряжения нелинейная, то схема замещения содержит *нелинейный резистивный элемент*, который задается нелинейной *вольт-амперной характеристикой* $I(U)$. На рис. 2.6 приведены вольт-амперные характеристики (ВАХ) линейного (линия a) и нелинейного (линия b) резистивных элементов, а также условные обозначения их на схемах замещения.

2.5. СПОСОБЫ СОЕДИНЕНИЯ РЕЗИСТОРОВ

Возможны последовательное, параллельное и смешанное соединения резисторов в электрической цепи.

Последовательным называется соединение резисторов, при котором к концу каждого предыдущего резистора присоединяется начало следующего. На рис. 2.7 показана схема цепи с последовательным соединением трех резистивных элементов. При этом ток в каждом резистивном элементе одинаковый I. Напряжение, приложенное к цепи, равно сумме напряжений на резистивных элементах и с учетом закона Ома равно

$$U = R_{эк}I = U_1 + U_2 + U_3 = R_1I + R_2I + R_3I,$$

где $R_{эк}$ — эквивалентное сопротивление цепи.

Разделив обе части равенства на I, получим соотношение

$$R_{эк} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Параллельным называется соединение группы резисторов, при котором их начала присоединяются к одному узлу цепи, а концы — к другому. На рис. 2.8 показана схема цепи с параллельным соединением трех резистивных элементов между узлами a и b.

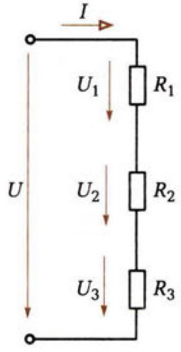


Рис. 2.7

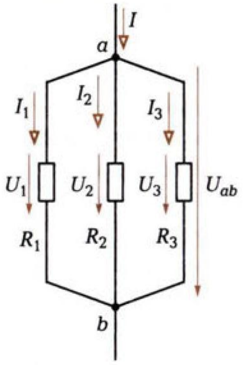


Рис. 2.8

При этом напряжения на всех резистивных элементах одинаковые

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_{ab} = U.$$

Общий ток цепи равен сумме токов в резисторах и с учетом закона Ома

$$I = U/R_{эк} = I_1 + I_2 + I_3 = U/R_1 + U/R_2 + U/R_3,$$

где $R_{эк}$ — эквивалентное сопротивление цепи.

Разделив обе части равенства на U, получим соотношение

$$1/R_{эк} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$$

или, учитывая, что проводимость резистора равна $G = 1/R$,

$$\boxed{G_{эк} = G_1 + G_2 + G_3.}$$

Для двух параллельно соединенных резисторов:

$$1/R_{эк} = 1/R_1 + 1/R_2, \text{ или } R_{эк} = R_1R_2/(R_1 + R_2).$$

Если параллельно соединены n одинаковых резисторов $R_1 = R_2 = = s\ R$, то $R_{эк} = R/n$.

Для схемы, изображенной на рис. 2.8:

$$I_1R_1 = U;\ I_2R_2 = U;\ I_3R_3 = U.$$

Так как правые части этих равенств равны между собой, то

$$I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3.$$

Отсюда получаем следующее соотношение:

$$I_1/I_2 = R_2/R_1;\ I_2/I_3 = R_3/R_2;\ I_3/I_1 = R_1/R_3.$$

Это означает, что токи в резисторах, включенных параллельно, распределяются обратно пропорционально их сопротивлениям.

Смешанным называется такое соединение резисторов в цепи, при котором одна их часть соединяется параллельно, а другая — последовательно.

При расчете таких цепей определяют вначале эквивалентные сопротивления параллельно и последовательно соединенных групп резисторов, а затем — общее сопротивление всей цепи.

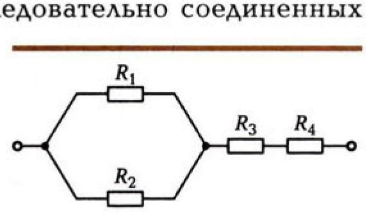


Рис. 2.9

Например, для схемы цепи на рис. 2.9 эквивалентные сопротивления участков с параллельным соединением резистивных элементов R_1 и R_2 и последовательным соединением резистивных элементов R_3 и R_4 равны

$$R_{эк12} = R_1R_2/(R_1 + R_2);$$
$$R_{эк34} = R_3 + R_4.$$

Общее сопротивление цепи равно

$$\boxed{R_{общ} = R_{эк12} + R_{эк34}.}$$

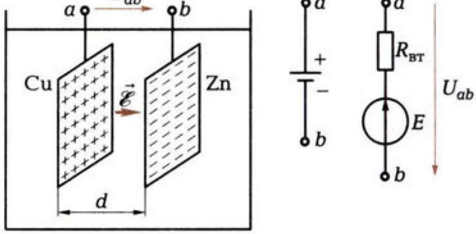
2.6. ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

Рассмотрим источник электрической энергии постоянного тока на примере гальванического элемента (рис. 2.10, *а*), представляющего собой две пластины — из меди Cu и цинка Zn, помещенные в раствор серной кислоты. Чистая кислота не проводит электрического тока. Но при растворении ее в дистиллированной воде она распадается на ионы, заряженные положительно и отрицательно

$$H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}$$

Раствор кислоты, щелочи или соли в дистиллированной воде или другом растворителе называют *электролитом*, а процесс распада химических соединений под действием растворителя на ионы — *электролитической диссоциацией*.

Вследствие химических процессов положительные ионы цинка Zn^{2+} переходят в раствор серной кислоты, оставляя на цинковой пластине избыток отрицательных свободных зарядов. Одновременно в растворе серной кислоты тяжелые и малоподвижные



а б в

Рис. 2.10

положительные ионы цинка Zn^{2+} оттесняют легкие и подвижные положительные ионы водорода H^+ к медной пластине, на поверхности которой происходит восстановление нейтральных атомов водорода. При этом медная пластина теряет свободные отрицательные заряды, т. е. заряжается положительно.

Между разноименно заряженными пластинами возникает однородное электрическое поле напряженностью $\vec{\mathscr{E}}$, которое препятствует направленному движению ионов в растворе. При значении напряженности поля $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$ накопление зарядов на пластинах прекращается. Напряжение, равное разности потенциалов между пластинами, при котором накопление зарядов прекращается, служит количественной мерой *сторонней силы* (в данном случае химической природы), стремящейся к накоплению заряда.

Электродвижущей силой (ЭДС) называется количественная мера сторонней силы. Для гальванического элемента ЭДС E определяется по формуле

$$\boxed{E = \mathscr{E}_0 d = U_{ab\,\text{х}},}$$

где d — расстояние между пластинами; $U_{ab\,\text{х}} = V_{a\,\text{х}} - V_{b\,\text{х}}$ — напряжение, равное разности потенциалов между выводами пластин в режиме холостого хода, т. е. при отсутствии тока в гальваническом элементе.

Если к выводам гальванического элемента подключить приемник, например резистор, то в замкнутой цепи возникнет ток. Направленное движение ионов в растворе кислоты сопровождается их взаимными столкновениями, что создает *внутреннее сопротивление* гальванического элемента постоянному току. Гальванический элемент, эскизное изображение которого дано на рис. 2.10, *а*, а обозначение на принципиальных схемах — на рис. 2.10, *б*, можно представить схемой замещения (рис. 2.10, *в*), состоящей из последовательно включенных ЭДС E источника и резистивного элемента сопротивлением $R_{\text{вт}}$, равным его внутреннему сопротивлению. Стрелка ЭДС указывает направление движения положительных зарядов в гальваническом элементе под действием сторонних сил. Стрелка напряжения U_{ab} указывает направление движения положительных зарядов под действием сил электрического поля в приемнике, если его подключить к гальваническому элементу.

Схема замещения на рис. 2.10, *в* справедлива для любых других источников электрической энергии постоянного тока, которые отличаются от гальванического элемента физической природой ЭДС и внутреннего сопротивления.

2.7. ИСТОЧНИК ЭДС И ИСТОЧНИК ТОКА

Источник ЭДС и источник тока являются частными случаями источника электрической энергии.

Рассмотрим процессы в цепи, состоящей из источника электрической энергии и подключенного к нему резистора с сопротивлением нагрузки $R_н$. Представим источник электрической энергии схемой замещения на рис. 2.10, *в*, а всю цепь — схемой на рис. 2.11, *а*.

Свойства источника электрической энергии определяет *вольт-амперная*, или *внешняя, характеристика* — зависимость напряжения между его выводами $U_{ab} = U$ от тока I источника, т.е. $U(I)$:

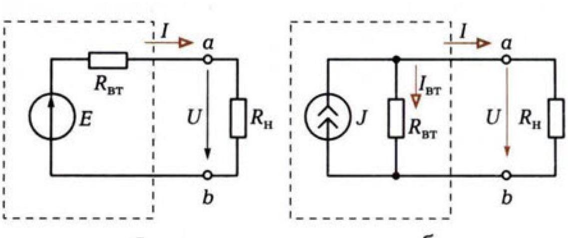
$$U = E - R_{вт}I = U_х - R_{вт}I, \tag{2.6}$$

которой соответствует прямая на рис. 2.12, *а*. Уменьшение напряжения источника при увеличении тока объясняется увеличением падения напряжения на его внутреннем сопротивлении $R_{вт}$. При напряжении $U = 0$ ток источника равен току короткого замыкания: $I = I_к = E/R_{вт}$.

Участок внешней характеристики при отрицательных значениях тока соответствует потреблению источником энергии из внешней относительно него цепи, например зарядке аккумулятора.

Источник ЭДС. Если внутреннее сопротивление источника электрической энергии во много раз меньше сопротивления цепи нагрузки, то напряжение источника по (2.6) при токе по закону Ома $I = E/(R_{вт} + R_н)$ и значениях сопротивлений $R_н \gg R_{вт}$ практически равно ЭДС

$$U = E - \frac{R_{вт}E}{R_{вт} + R_н} = E - \frac{E}{1 + R_н/R_{вт}} \approx E = \text{const}.$$



а *б*

Рис. 2.11

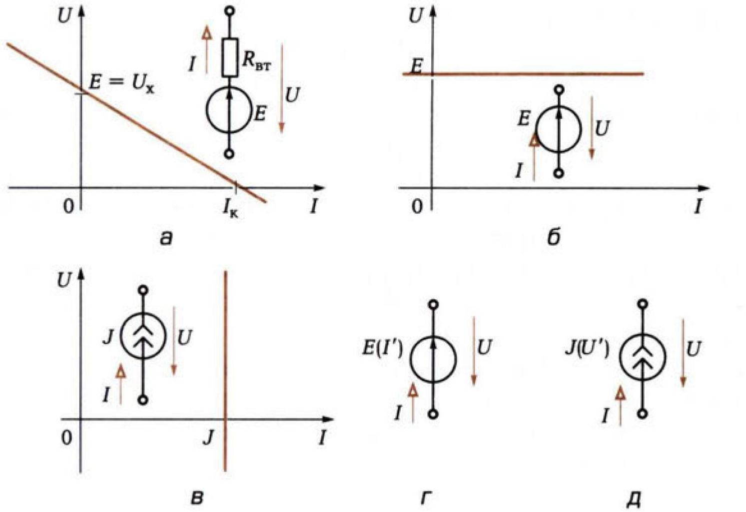


Рис. 2.12

Источник электрической энергии с малым внутренним сопротивлением можно заменить идеализированной моделью, для которой $R_{вт} = 0$. Такой идеализированный источник электрической энергии называется *идеальным источником ЭДС* и характеризуется одним параметром $E = U_x = U$. Напряжение между выводами идеального источника ЭДС не зависит от тока, а его внешняя характеристика определяется выражением

$$U = E = \text{const}, \tag{2.7}$$

которому соответствует прямая на рис. 2.12, *б*. Такой источник называется также *источником напряжения*. На этом же рисунке показано обозначение идеального источника ЭДС на схемах.

Источник тока. Если внутреннее сопротивление источника электрической энергии во много раз больше сопротивления цепи нагрузки, то ток источника при значениях сопротивлений $R_{вт} \gg R_н$ практически равен его току короткого замыкания

$$I = \frac{E}{R_{вт} + R_н} \approx E/R_{вт} = I_к = J = \text{const}.$$

Источник электрической энергии с большим внутренним сопротивлением можно заменить идеализированной моделью, у которой $R_{вт} \to \infty$ и $E \to \infty$ и для которой справедливо равенство $E/R_{вт} = J$. Такой идеализированный источник электрической энергии называется *идеальным источником тока* и характеризуется одним параметром $J = J_к$. Ток источника тока не зависит от напряжения между его выводами, а его внешняя характеристика определяется выражением

$$\boxed{I = J = \text{const},} \tag{2.8}$$

которому соответствует прямая на рис. 2.12, *в*. На этом же рисунке дано обозначение источника тока на схемах. Участок внешней характеристики с отрицательным значением напряжения соответствует потреблению источником тока энергии из внешней относительно него цепи.

От схемы замещения источника энергии на рис. 2.11, *а* можно перейти к эквивалентной схеме замещения с источником тока. Для этого разделим все слагаемые уравнения (2.6) на внутреннее сопротивление источника $R_{вт}$:

$$U/R_{вт} = E/R_{вт} - I,$$

или

$$E/R_{вт} = J = U/R_{вт} + I = I_{вт} + I.$$

Полученному уравнению соответствует эквивалентная схема замещения на рис. 2.11, *б*. Представление реальных источников электрической энергии в виде двух схем замещения является эквивалентным относительно внешнего участка цепи: в обоих случаях одинаковы токи источников и напряжения между их выводами.

В теории цепей различают независимые и зависимые источники ЭДС и тока. В последнем случае значения их параметров зависят от значений других величин, например $E(I')$ (рис. 2.12, *г*), $J(U')$ (рис. 2.12, *g*), где I' и U' — ток и напряжение какой-либо из ветвей цепи.

2.8. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАКОНЫ КИРХГОФА. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ОМА

Два закона Кирхгофа — основные законы электрических цепей.

Первый закон Кирхгофа. *Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю*:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0,} \tag{2.9}$$

где n — число ветвей, соединяющихся в узле; k — порядковый номер ветви.

В (2.9) со знаком «плюс» записываются токи с положительными направлениями от узла, а со знаком «минус» — с положительными направлениями к узлу, или наоборот. Иначе, сумма токов, направленных от узла, равна сумме токов, направленных к узлу. Например, для узла цепи на рис. 2.13

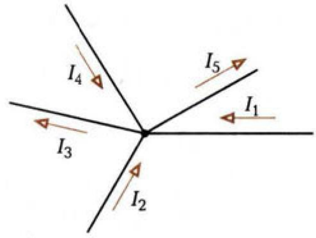


Рис. 2.13

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = \sum_{k=1}^{n} I_k = 0,$$

или

$$I_3 + I_5 = I_1 + I_2 + I_4.$$

Этот закон является следствием того, что в узлах цепи постоянного тока заряды не могут накапливаться. В противном случае изменялись бы потенциалы узлов и токи в ветвях.

Второй закон Кирхгофа. *Алгебраическая сумма напряжений участков любого контура электрической цепи равна нулю*:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} U_k = 0,} \tag{2.10}$$

где m — число участков контура; k — порядковый номер участка.

В (2.10) со знаком «плюс» записываются напряжения, положительные направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком «минус» — противоположно направленные, или наоборот.

Для контура схемы цепи, содержащего только источники ЭДС и резистивные элементы, *алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах равна алгебраической сумме ЭДС*, т.е. второй закон Кирхгофа принимает вид

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_{Rk} = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k = \sum_{k=1}^{m} E_k,} \tag{2.11}$$

где n и m — числа резистивных элементов и ЭДС в контуре.

В (2.11) со знаком «плюс» записываются ЭДС и токи, положительные направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком «минус» — противоположно направленные, или наоборот.

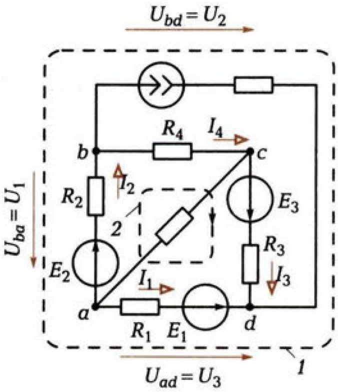


Рис. 2.14

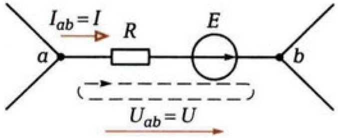


Рис. 2.15

Для контуров, содержащих источники тока, допустима запись второго закона Кирхгофа только в виде (2.10), но не в виде (2.11).

Например, для контура *1* схемы цепи на рис. 2.14 по (2.10)

$$-U_1 + U_2 - U_3 = 0,$$

для контура *2* по (2.11)

$$\sum_{k=1}^{4} R_k I_k = -R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_3 I_3 = \sum_{k=1}^{3} E_k = -E_1 + E_2 + E_3.$$

Второй закон Кирхгофа (2.10) является следствием того, что в постоянном электрическом поле циркуляция его вектора напряженности вдоль замкнутого контура равна нулю (1.5).

В частном случае в контур может входить только одна ветвь цепи, так что он замыкается вне других ветвей цепи (рис. 2.15). В этом случае согласно (2.11)

$$RI_{ab} + U_{ab} = E,$$

откуда

$$\boxed{I_{ab} = \frac{(U_{ab} + E)}{R} = \frac{V_a - V_b + E}{R},}$$

$$\text{или} \qquad I = \frac{U + E}{R}, \tag{2.12}$$

где напряжение $U_{ab} = U$ и ток $I_{ab} = I$ ветви совпадают по направлению.

Уравнение (2.12) выражает *обобщенный закон Ома* для любой ветви с суммарным сопротивлением R и ЭДС E (но без источников тока) или отдельного участка этой ветви с параметрами R и E.

2.9. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ОМА И ЗАКОНОВ КИРХГОФА ДЛЯ РАСЧЕТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В общем случае схема цепи имеет B ветвей, из которых B_J ветвей содержат источники тока, и Y узлов.

Рассмотрим сначала расчет схемы цепи без источников тока, т.е. при $B_J = 0$, а затем общий случай.

Схема цепи без источников тока. Расчет схемы цепи без источников тока сводится к нахождению токов в B ветвях. Для этого необходимо составить $Y - 1$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа и $K = B - Y + 1$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа. Соответствующие этим уравнениям узлы и контуры называются *независимыми*.

Для планарных схем, т.е. допускающих изображение на плоскости без пересечения ветвей, достаточным условием выделения K независимых контуров является наличие в каждом из них одной ветви, принадлежащей только этому контуру.

Число независимых уравнений по первому закону Кирхгофа на единицу меньше числа узлов потому, что ток каждой ветви входит с разными знаками в уравнения для соединяемых ею узлов. Сумма слагаемых уравнений всех узлов тождественно равна нулю.

Решение системы уравнений определяет токи ветвей.

Рассмотрим расчет схемы цепи на рис. 2.16, которая содержит $Y = 2$ узла и $B = 3$ ветви, т.е. $K = B - Y + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ независимых контура (*1* и *2*, или *1* и *3*, или *2* и *3*).

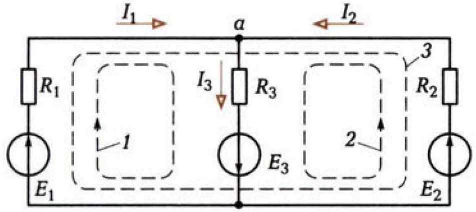


Рис. 2.16

Произвольно выбираем положительные направления токов ветвей I_1, I_2, I_3. По первому закону Кирхгофа составляем одно ($Y - 1 = 2 - 1 = 1$) независимое уравнение, например для узла a, и по второму закону Кирхгофа — два ($K = 2$) независимых уравнения, например для контуров *1* и *2*:

$$\left.\begin{aligned} -I_1 - I_2 + I_3 &= 0; \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 &= E_1 + E_3; \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 &= E_2 + E_3, \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

где напряжения на резистивных элементах определяются по закону Ома.

Решение системы трех уравнений (2.13) с тремя неизвестными токами определяет токи ветвей I_1, I_2, I_3.

Пример 2.1. С помощью законов Ома и Кирхгофа определить токи всех ветвей схемы на рис. 2.17 при значениях параметров элементов: $E_1 = 1$ В, $E_2 = 2$ В, $E_3 = 3$ В, $E_4 = 4$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом.

Решение. Схема содержит число ветвей $B = 6$, узлов $Y = 4$, независимых контуров $K = B - Y + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$.

Выбираем положительные направления токов в ветвях I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 и обозначаем узлы a, b, c, d.

Выбираем три ($K = 3$) независимых контура *1*, *2*, *3*, отмеченных на рис. 2.17 штриховой линией, и направления их обхода.

Составляем три ($K = 3$) независимых уравнения по второму закону Кирхгофа (для контуров *1*, *2*, *3*), три ($Y - 1 = 4 - 1 = 3$) независимых уравнения по первому закону Кирхгофа (для узлов a, b, c) и, решая их, определяем токи ветвей:

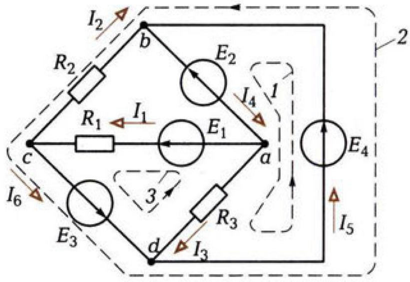


Рис. 2.17

$$\left.\begin{aligned} &R_3 I_3 = E_4 - E_2 \text{ (контур } 1);\\ &-R_2 I_2 = E_3 + E_4 \text{ (контур } 2);\\ &-R_3 I_3 + R_1 I_1 = E_1 + E_3 \text{ (контур } 3);\end{aligned}\right\}$$

$$I_3 = (E_4 - E_2)/R_3 = (4-2)/1 = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = -(E_4 + E_3)/R_2 = -(4+3)/2 = -3{,}5 \text{ А};$$

$$I_1 = (E_1 + E_3)/R_3 + (R_1/R_3)I_3 = (1+3)/4 + (1/4)2 = 1{,}5 \text{ А};$$

$$I_4 = I_1 + I_3 = 1{,}5 + 2 = 3{,}5 \text{ А (узел } a);$$

$$I_5 = -I_2 + I_4 = 3{,}5 + 3{,}5 = 7 \text{ А (узел } b);$$

$$I_6 = I_1 - I_2 = 1{,}5 + 3{,}5 = 5 \text{ А (узел } c).$$

В правильности решения можно убедиться, проверив справедливость первого закона Кирхгофа для узла d:

$$I_6 + I_3 - I_5 = 5 + 2 - 7 = 0.$$

Общий случай. При расчете схем с источниками ЭДС и тока возможны упрощения. Действительно, токи B_J ветвей с источниками тока известны и равны токам источников тока. Поэтому число независимых контуров (без источников тока!), для которых необходимо составить уравнения по второму закону Кирхгофа, равно $K = B - B_J - Y + 1$.

Пример 2.2. С помощью законов Ома и Кирхгофа определить токи всех ветвей схемы на рис. 2.18 при значениях параметров элементов: $E = 5$ В, $J = 2$ А, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 3$ Ом.

Решение. Схема содержит число ветвей $B = 3$, из которых с источником тока $B_J = 1$; узлов $Y = 2$ (a и b); независимых контуров (без источников тока) $K = B - B_J - Y + 1 = 3 - 1 + 2 - 1 = 1$ (контур *1*).

Выбираем положительные направления токов в ветвях и обозначаем их I_1, I_2, I_3. Ток $I_3 = J = 2$ А.

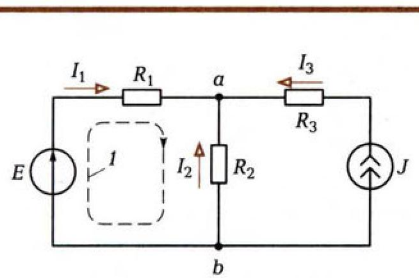


Рис. 2.18

Составляем одно независимое уравнение по второму закону Кирхгофа (для контура *1*, выбрав направление его обхода) и одно ($Y - 1 = 2 - 1 = 1$) независимое уравнение по первому закону Кирхгофа (для узла *a*):

$$\left.\begin{aligned} &R_1I_1 - R_2I_2 = E \ (\text{контур } 1);\\ &I_1 + I_2 + I_3 = 0 \ (\text{узел } a); \end{aligned}\right\} \text{или} \quad \begin{aligned} &2I_1 - 1I_2 = 5;\\ &I_1 + I_2 = -2. \end{aligned}$$

Сложив почленно первое и второе уравнения, определим ток $I_1 = 1$ А, а затем из второго уравнения — ток $I_2 = -3$ А.

Используя законы Ома и Кирхгофа, можно рассчитать режим работы любой электрической цепи. Для упрощения вычислений применяют различные расчетные методы: эквивалентного преобразования схем, контурных токов, узловых потенциалов, межузлового напряжения и т. д.

2.10. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СХЕМ

Расчет сложной электрической цепи упрощается, если в ее схеме замещения заменить группу резистивных элементов другой эквивалентной группой, в которой резистивные элементы соединены иначе. Взаимная эквивалентность заключается в том, что после замены режим работы остальной части цепи не изменится.

Смешанное соединение резистивных элементов. В схеме с одним источником внешнюю по отношению к нему часть схемы можно рассматривать как смешанное (последовательно-параллельное) соединение резистивных элементов.

Для расчета такую схему следует преобразовать в эквивалентную с последовательным соединением резистивных элементов. Например, в схеме на рис. 2.19, *а* между узлами *a* и *b* включены три резистивных элемента сопротивлениями R_2, R_3 и R_4, т. е. проводимостями $G_2 = 1/R_2$, $G_3 = 1/R_3$, $G_4 = 1/R_4$ и эквивалентной проводимостью

$$\boxed{G_{эк} = 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4.} \qquad (2.14)$$

Заменив параллельное соединение резистивных элементов эквивалентным резистивным элементом сопротивлением $R_{эк} = 1/G_{эк}$, получим эквивалентную схему с последовательным соединением двух резистивных элементов R_1 и $R_{эк}$ (рис. 2.19, *б*), ток в которой равен

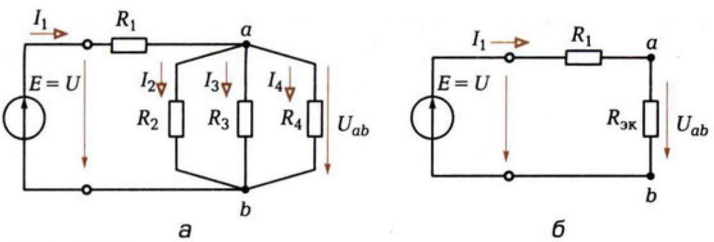


Рис. 2.19

$$I_1 = U/(R_1 + R_{эк}). \tag{2.15}$$

Токи в параллельных ветвях исходной схемы равны

$$\boxed{I_2 = U_{ab}/R_2;} \quad \boxed{I_3 = U_{ab}/R_3;} \quad \boxed{I_4 = U_{ab}/R_4,} \tag{2.16}$$

где напряжение $U_{ab} = R_{эк}I_1$.

Соединение резистивных элементов звездой и треугольником. Схему замещения цепи в виде трехлучевой звезды из резистивных элементов можно заменить эквивалентной схемой в виде треугольника, и наоборот. Такое преобразование применяется при расчетах сложных цепей постоянного тока и трехфазных цепей (см. гл. 6).

Эквивалентность схем в виде треугольника и звезды (рис. 2.20) получается приравниванием значений сопротивлений или проводимостей между одноименными узлами этих схем, отсоединенных от остальной части схемы.

Найдем сопротивление между узлами a и b. Проводимость между узлами a и b в схеме соединения треугольником (рис. 2.20, a) равна

$$\frac{1}{R_{ab}} + \frac{1}{R_{bc} + R_{ca}} = \frac{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}{R_{ab}R_{bc} + R_{ca}R_{ab}}.$$

Сопротивление между узлами a и b — величина, обратная проводимости между этими узлами, т.е. $R_{ab} = (R_{ab}R_{bc} + R_{ca}R_{ab})/(R_{ab} + R_{bc} + R_{ca})$.

В схеме соединения звездой (рис. 2.20, $б$) сопротивление между узлами a и b равно сумме сопротивлений двух ветвей: $R_a + R_b$.

Условием эквивалентности является равенство

$$R_a + R_b = \frac{R_{ab}R_{bc} + R_{ca}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = \frac{R_{ab}R_{bc} + R_{ca}R_{ab}}{\sum R_\Delta}, \tag{2.17}$$

где $\sum R_\Delta$ — сумма сопротивлений всех ветвей в схеме соединения треугольником.

Циклическая перестановка индексов в (2.17) определяет условия равенства сопротивлений между одноименными узлами b и c и между узлами c и a схем треугольника и звезды

$$R_b + R_c = \frac{R_{bc}R_{ca} + R_{ab}R_{bc}}{\sum R_\Delta}; \tag{2.18}$$

$$R_c + R_a = \frac{R_{ca}R_{ab} + R_{bc}R_{ca}}{\sum R_\Delta}. \tag{2.19}$$

Сложив (2.17) и (2.19) и вычтя из этой суммы (2.18), найдем выражение для сопротивления ветви звезды:

$$\boxed{R_a = R_{ab}R_{ca} / \sum R_\Delta.} \tag{2.20}$$

Циклическая перестановка индексов в (2.20) определяет выражения для сопротивлений двух других ветвей звезды:

$$\boxed{R_b = R_{bc}R_{ab} / \sum R_\Delta;} \tag{2.21}$$

$$\boxed{R_c = R_{ca}R_{bc} / \sum R_\Delta.} \tag{2.22}$$

При равенстве сопротивлений ветвей треугольника ($R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_\Delta$) сопротивления ветвей эквивалентной звезды тоже одинаковы:

$$R_\curlywedge = R_\Delta / 3. \tag{2.23}$$

Возможно обратное преобразование звезды из резистивных элементов в эквивалентный треугольник. Для этого умножим попарно выражения (2.20)—(2.22) и сложим полученные произведения:

$$R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a = R_{ab}R_{bc}R_{ca} / (R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}).$$

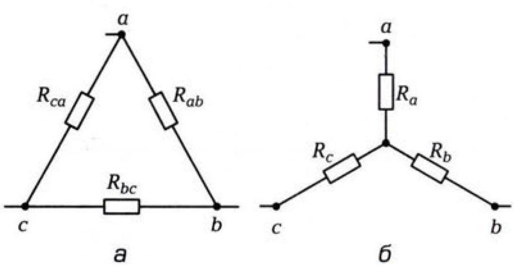


Рис. 2.20

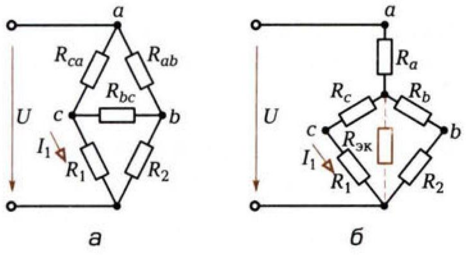


Рис. 2.21

Разделив это соотношение на (2.22), определим сопротивление ветви треугольника:

$$\boxed{R_{ab} = R_a + R_b + R_aR_b/R_c.} \tag{2.24}$$

Циклическая перестановка индексов в (2.24) определяет выражения для сопротивлений двух других ветвей треугольника:

$$\boxed{R_{bc} = R_b + R_c + R_bR_c/R_a;} \tag{2.25}$$

$$\boxed{R_{ca} = R_c + R_a + R_cR_a/R_b.} \tag{2.26}$$

Пример 2.3. Рассчитать сопротивление мостовой схемы соединения резистивных элементов (рис. 2.21, *а*) при значении их сопротивлений: $R_{ab} = R_{bc} = 10$ Ом, $R_{ca} = 20$ Ом, $R_1 = 2{,}5$ Ом, $R_2 = 5$ Ом.

Решение. Заменим схему соединения резистивных элементов R_{ab}, R_{bc}, R_{ca} треугольником эквивалентной схемой соединения звездой, сопротивления ветвей которой определим по формулам (2.20)—(2.22):

$$R_a = 5 \text{ Ом}, R_b = 2{,}5 \text{ Ом}, R_c = 5 \text{ Ом}.$$

В полученной схеме смешанного соединения резистивных элементов заменим две параллельные ветви одной ветвью с эквивалентным резистивным элементом (показан на рис. 2.21, *б* штриховой линией), сопротивление которого определим по (2.14):

$$R_{эк} = \frac{(R_c + R_1)(R_b + R_2)}{R_c + R_1 + R_b + R_2} = 3{,}75 \text{ Ом}.$$

Сопротивление мостовой схемы и полученной эквивалентной схемы с последовательным соединением двух резистивных элементов равны $R_a + R_{эк} = 8{,}75$ Ом.

2.11. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Метод узловых потенциалов позволяет уменьшить число совместно решаемых независимых уравнений для расчета цепи до $Y - 1$, где Y — число узлов схемы замещения цепи. Метод основан на применении первого закона Кирхгофа и заключается в следующем.

1. Один узел схемы цепи принимаем базисным с нулевым потенциалом. Такое допущение не изменяет разности потенциалов между узлами, а следовательно, напряжения и токи ветвей.

2. Для остальных $Y - 1$ узлов составляем уравнения по первому закону Кирхгофа, выражая токи ветвей, не содержащих источников тока, через потенциалы соединяемых ими узлов.

3. Решением составленной системы уравнений определяем потенциалы $Y - 1$ узлов относительно базисного, а затем токи ветвей по обобщенному закону Ома (2.12).

Рассмотрим расчет цепи, содержащей $Y = 3$ узла (рис. 2.22). Узел *3* принимаем базисным, т.е. потенциал $V_3 = 0$. Из уравнений по первому закону Кирхгофа для узлов *1* и *2*

$$I_1 + I_3 + J_1 = 0;$$
$$I_2 - I_3 - J_2 = 0$$

после подстановки выражений токов через потенциалы узлов $I_1 = (V_1 - V_3)/R_1 = V_1/R_1$; $I_2 = (V_2 - V_3)/R_2 = V_2/R_2$; $I_3 = (V_1 - V_2 + E)/R_3$ получим

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)V_1-\frac{1}{R_3}V_2=-J_1-\frac{E}{R_3}; \\ -\frac{1}{R_3}V_1+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_2=J_2+\frac{E}{R_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

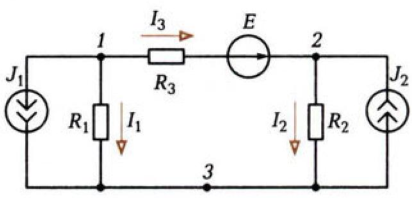


Рис. 2.22

Решение системы уравнений (2.27) определяет потенциалы узлов V_1 и V_2, а следовательно, и токи ветвей по (2.12).

Из записи (2.27) очевиден *принцип составлений уравнений по методу узловых потенциалов*. В левой части уравнений коэффициент при потенциале рассматриваемого узла положительный и равен сумме проводимостей сходящихся к нему ветвей. Коэффициенты при потенциалах узлов, соединенных ветвями с рассматриваемым узлом, отрицательные и равны проводимостям соответствующих ветвей.

Правая часть уравнений содержит алгебраическую сумму токов ветвей с источниками токов и токов короткого замыкания ветвей с источниками ЭДС, сходящихся к рассматриваемому узлу, причем слагаемые берутся со знаком плюс (минус), если ток источника тока и ЭДС направлены к рассматриваемому узлу (от узла).

Пример 2.4. Определить методом узловых потенциалов токи всех ветвей схемы на рис. 2.23 при значениях параметров элементов: $J = 2$ А, $E_1 = 10$ В, $E_2 = 3{,}5$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 =$ $= 1$ Ом.

Решение. Схема содержит число ветвей $B = 5$, из которых с источником тока $B_J = 1$; узлов $Y = 3$.

Выбираем положительные направления токов в ветвях и обозначаем номера узлов *1*, *2*, *3* и токов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. Ток $I_5 = J = 2$ А.

Узел *3* принимаем базисным, т. е. потенциал $V_3 = 0$.

Составляем два ($Y - 1 = 3 - 1 = 2$) независимых уравнения по методу узловых потенциалов для узлов *1* и *2*

$$V_1\left(\frac{1}{R_4+R_5}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-V_2\left(\frac{1}{R_4+R_5}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_2}{R_2};$$

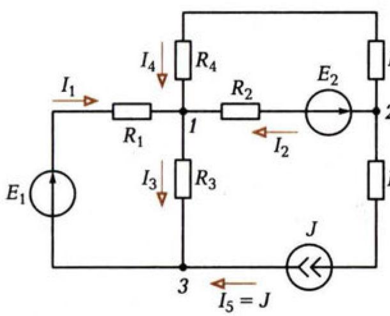


Рис. 2.23

$$-V_1\left(\frac{1}{R_4+R_5}+\frac{1}{R_2}\right)+V_2\left(\frac{1}{R_4+R_5}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{E_2}{R_2}-J,$$

т.е.

$$3{,}5V_1-1{,}5V_2=6{,}5;\ -1{,}5V_1+1{,}5V_2=1{,}5.$$

Сложив уравнения почленно, определим потенциал $V_1 = 4$ В, а затем из второго уравнения потенциал $V_2 = 5$ В.

По обобщенному закону Ома (2.12) определяем токи ветвей

$$I_1=\frac{V_3-V_1+E_1}{R_1}=\frac{0-4+10}{1}=6\ \text{А};$$

$$I_2=\frac{V_2-V_1-E_2}{R_2}=\frac{5-4-3{,}5}{1}=-2{,}5\ \text{А};$$

$$I_3=\frac{V_1-V_3}{R_3}=\frac{4-0}{1}=4\ \text{А};$$

$$I_4=\frac{V_2-V_1}{R_4+R_5}=\frac{5-4}{1+1}=0{,}5\ \text{А}.$$

В правильности решения можно убедиться, проверив справедливость первого закона Кирхгофа для узла *3*:

$$I_3+I_5-I_1=4+2-6=0.$$

В частном случае схемы цепи без источников тока с *двумя узлами* потенциал узла *1* при базисном узле *2*, т.е. при $V_2 = 0$, равен напряжению между узлами

$$\boxed{U_{12}=V_1-V_2=\frac{\sum E/R}{\sum 1/R}=\frac{\sum GE}{\sum G}.} \qquad (2.28)$$

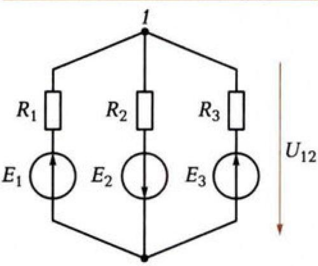


Рис. 2.24

Выражение (2.28) называется *формулой межузлового напряжения*, которая применяется, например, при анализе трехфазных электрических цепей.

Пример 2.5. Определить межузловое напряжение U_{12} в схеме на рис. 2.24 при значениях параметров элементов: $E_1 = 10$ В, $E_2 = 30$ В, $E_3 = = 0{,}75$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = = 2{,}5$ Ом.

Решение. Межузловое напряжение по (2.28) равно

$$U_{12} = \frac{E_1/R_1 - E_2/R_2 + E_3/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{2-3+0{,}3}{0{,}2+0{,}1+0{,}4} = -1 \text{ В}.$$

2.12. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов позволяет уменьшить число совместно решаемых независимых уравнений для расчета схемы цепи до $K = B - B_J - Y + 1$ и основан на применении второго закона Кирхгофа.

Рассмотрим сначала расчет схемы цепи без источников тока, т. е. при $B_J = 0$, а затем общий случай.

Схема цепи без источников тока. Метод контурных токов для расчета схемы цепи без источников тока заключается в следующем.

1. Выбираем $K = B - Y + 1$ независимых контуров и положительных направлений контурных токов, каждый из которых протекает по всем элементам соответствующего контура.

Для планарных схем, т. е. допускающих изображение на плоскости без пересечения ветвей, достаточным условием выделения K независимых контуров является наличие в каждом из них одной ветви, принадлежащей только этому контуру.

2. Для K независимых контуров составляем уравнения по второму закону Кирхгофа, совместное решение которых определяет все контурные токи.

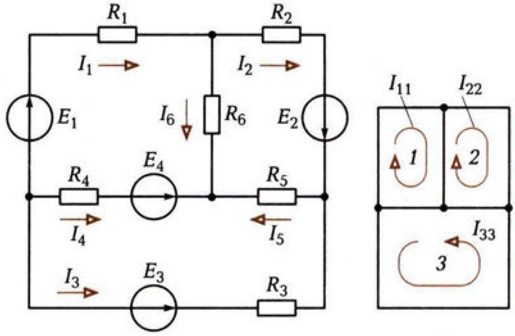
3. Ток каждой ветви определяем по первому закону Кирхгофа как алгебраическую сумму контурных токов в соответствующей ветви.

Рассмотрим расчет цепи (рис. 2.25, *а*) с числом ветвей $B = 6$, узлов $Y = 4$, независимых контуров $K = B - Y + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$. Выберем независимые контуры *1—3* и положительные направления контурных токов в них I_{11}, I_{22} и I_{33} (рис. 2.25, *б*). В отличие от токов ветвей каждый контурный ток обозначим двойным индексом номера контура.

Составим систему уравнений по второму закону Кирхгофа для контуров *1*, *2* и *3*:

$$\left.\begin{aligned}&(R_1 + R_4 + R_6)I_{11} - R_6 I_{22} + R_4 I_{33} = E_1 - E_4;\\&-R_6 I_{11} + (R_2 + R_5 + R_6)I_{22} + R_5 I_{33} = E_2;\\&R_4 I_{11} + R_5 I_{22} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{33} = E_3 - E_4,\end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

решение которой определяет контурные токи I_{11}, I_{22}, I_{33}.



а б

Рис. 2.25

Токи ветвей (см. рис. 2.25, *а*) при выбранных для них положительных направлениях находим по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_{11};\ I_2 = I_{22};\ I_3 = I_{33};\ I_4 = -I_{11} - I_{33};\ I_5 = I_{22} + I_{33};\ I_6 = I_{11} - I_{22}.$$

Из (2.29) очевиден *принцип составления уравнений по методу контурных токов*. В левой части уравнений положительный коэффициент при контурном токе рассматриваемого контура равен сумме сопротивлений его ветвей. Коэффициенты при контурных токах в контурах, имеющих общие ветви с рассматриваемым контуром, равны сумме сопротивлений общих ветвей со знаком плюс (минус), если направления контурных токов в общих ветвях совпадают (противоположны).

Правая часть уравнений содержит алгебраическую сумму ЭДС ветвей рассматриваемого контура, причем слагаемое записывается со знаком плюс (минус), если направления ЭДС и положительное направление контурного тока совпадают (противоположны).

Пример 2.6. Определить методом контурных токов токи всех ветвей схемы на рис. 2.26 при значениях параметров элементов: $E_1 = 50$ В, $E_2 = 3$ В, $E_3 = 13$ В, $R_1 = R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 10$ Ом.

Решение. Схема содержит число ветвей $B = 3$, узлов $Y = 2$ (a и b), независимых контуров $K = B - Y + 1 = 2$.

Выбираем положительные направления токов в ветвях и обозначаем их I_1, I_2, I_3.

Выбираем два ($K = 2$) независимых контура *1* и *2*, отмеченные на рис. 2.26 штриховой линией, и положительные направления в них контурных токов I_{11}, I_{22}.

Составляем два ($K = 2$) независимых уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров *1* и *2*:

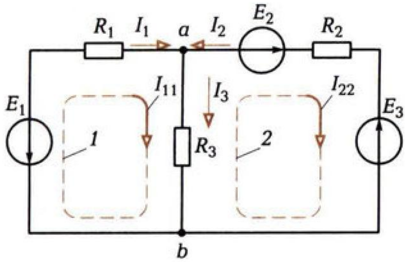


Рис. 2.26

$$(R_1 + R_3)I_{11} - R_3 I_{22} = -E_1; \quad -R_3 I_{11} + (R_2 + R_3)I_{22} = E_2 - E_3$$

или

$$\left.\begin{aligned} 30I_{11} - 10I_{22} &= -50; \\ -10I_{11} + 30I_{22} &= -10, \end{aligned}\right\}$$

совместное решение которых определяет контурные токи $I_{11} = -2$ А, $I_{22} = -1$ А.

По первому закону Кирхгофа токи ветвей при выбранных положительных направлениях равны:

$$I_1 = I_{11} = -2 \text{ А}, \ I_2 = -I_{22} = 1 \text{ А}, \ I_3 = I_{11} - I_{22} = -1 \text{ А}.$$

В правильности решения можно убедиться, проверив справедливость первого закона Кирхгофа, например для узла a:

$$I_1 + I_2 - I_3 = -2 + 1 + 1 = 0.$$

Общий случай. При расчете схемы с источниками ЭДС и тока возможны упрощения. Контурный ток, выбранный так, что других контурных токов в ветви с источником тока нет, известен и равен току источника тока. Поэтому в схеме с B ветвями, B_J из которых содержат источники тока, число независимых контуров без источников тока и соответствующих им неизвестных контурных токов и уравнений равно $K = B - B_J - Y + 1$.

Пример 2.7. Определить методом контурных токов токи всех ветвей схемы на рис. 2.27 при значениях параметров элементов: $J_1 = 1$ А, $J_2 = 1{,}5$ А, $E_1 = 5$ В, $E_2 = 15$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом.

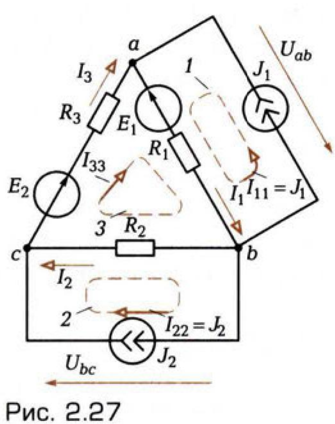


Рис. 2.27

Решение. Схема содержит число ветвей $B = 5$, из которых с источниками тока $B_J = 2$, узлов $Y = 3$, независимых контуров без источников тока $K = B - B_J - Y + 1 = 5 - 2 - 3 + 1 = 1$ (контур *3*).

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура *3* при выбранных положительных направлениях всех контурных токов:

$$R_1I_{11} - R_2I_{22} + (R_1 + R_2 + R_3)I_{33} = E_2 - E_1,$$

решение которого определяет контурный ток контура *3*

$$I_{33} = \frac{E_2 - E_1 - R_1I_{11} + R_2I_{22}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{15-5-1\cdot1+2\cdot1{,}5}{1+2+3} = 2\ \text{А},$$

где $I_{11} = J_1$ и $I_{22} = J_2$ — известные контурные токи контуров *1* и *2*.

По первому закону Кирхгофа токи ветвей при выбранных положительных направлениях равны:

$$I_1 = I_{11} + I_{33} = 3\ \text{А};\ I_2 = I_{33} - I_{22} = 0{,}5\ \text{А};\ I_3 = I_{33} = 2\ \text{А}.$$

В правильности решения можно убедиться, проверив справедливость первого закона Кирхгофа, например для узла *a*:

$$I_3 - I_1 + J_1 = 2 - 3 + 1 = 0.$$

2.13. ПРИНЦИП И МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ (СУПЕРПОЗИЦИИ)

Принцип наложения заключается в том, что в линейных электрических цепях ток в любой ветви равен алгебраической сумме токов этой ветви (частичных токов) при действии каждого источника в отдельности, если остальные источники заменяются резисторами с сопротивлениями, равными внутренним сопротивлениям источников. То же относится к напряжению на любом участке цепи.

На основе принципа наложения для расчета цепей применяется *метод наложения** (*суперпозиции*). *Ток в каждой ветви схемы цепи равен алгебраической сумме частичных токов от действия каждого источника ЭДС $I^{(E)}$ и каждого источника тока $I^{(J)}$ в отдельности.*

---

* В механике принцип наложения называется принципом независимости действия сил: движение тела под действием нескольких сил равно сумме его движений, вызываемых действием каждой силы в отдельности.

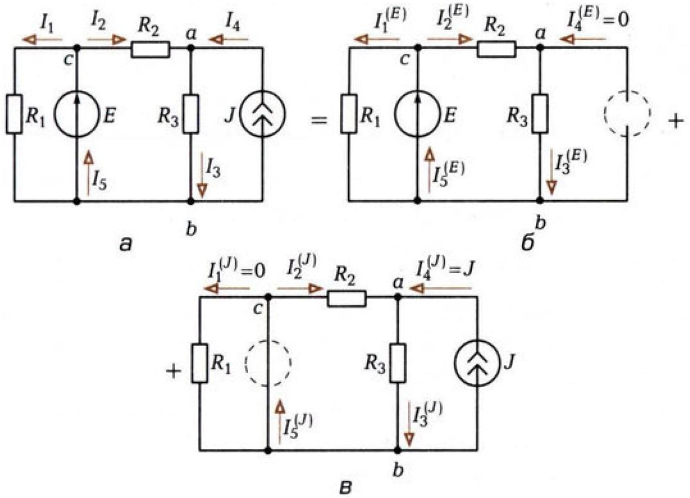


Рис. 2.28

Отсутствие действия источника означает его замену резистивным элементом с сопротивлением, равным внутреннему сопротивлению источника. Для источника ЭДС внутреннее сопротивление $R_{вт} = 0$, для источника тока — $R_{вт} \to \infty$, т. е. соответствующий участок схемы закорачивается или разрывается.

Пример 2.8. Определить методом наложения токи всех ветвей в схеме цепи на рис. 2.28, *а* при значениях параметров элементов: $E = 10$ В, $J = 5$ А, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом.

Решение. Схема содержит число ветвей $B = 5$, из которых с источником тока $B_J = 1$, узлов $Y = 3$ (a, b, c).

Выбираем положительные направления токов в ветвях и обозначаем их I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. Токи ветвей равны сумме частичных токов в одноименных ветвях схем на рис. 2.28, *б* и *в*:

$$I_1 = I_1^{(E)} + I_1^{(J)} = \frac{E}{R_1} + 0 = \frac{10}{5} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = I_2^{(E)} + I_2^{(J)} = \frac{E}{R_2 + R_3} - \frac{R_3 J}{R_2 + R_3} = \frac{10}{2+3} - \frac{3 \cdot 5}{2+3} = -1 \text{ А};$$

$$I_3 = I_3^{(E)} + I_3^{(J)} = \frac{E}{R_2 + R_3} + \frac{R_2 J}{R_2 + R_3} = \frac{10}{2+3} + \frac{2 \cdot 5}{2+3} = 4 \text{ А};$$

$$I_4 = I_4^{(E)} + I_4^{(J)} = 0 + J = 5 \text{ А};$$

$$I_5 = I_5^{(E)} + I_5^{(J)} = I_1^{(E)} + I_2^{(E)} + I_2^{(J)} = 2 + 2 - 3 = 1 \text{ А}.$$

2.14. РАБОТА И МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении положительного заряда q вдоль неразветвленного участка $a - b$ электрической цепи, не содержащего источников электрической энергии, равна произведению этого заряда на напряжение $U_{ab} = U$ между концами участка: $A = qU$. При равномерном движении заряда в течение времени t, т.е. при постоянном токе $I_{ab} = I$, перемещаемый вдоль участка заряд равен

$$q = It,$$

а совершаемая при этом работа равна

$$A = UIt.$$

Мощность равна скорости, с которой совершается работа

$$\boxed{P = UI.} \tag{2.30}$$

Основная единица измерения работы в СИ — *джоуль* (Дж), мощности — *ватт* (Вт).

Практической единицей измерения электрической энергии служит *киловатт-час* (кВт · ч), т.е. работа, совершаемая при неизменной мощности 1 кВт в течение 1 ч. Так как 1 Вт · с = 1 Дж, то 1 кВт · ч = 3 600 000 Дж = 3,6 МДж.

Для резистивных элементов выражение (2.30) можно преобразовать, воспользовавшись законом Ома:

$$\boxed{P_R = UI = RI^2 = GU^2.} \tag{2.31}$$

Для источника ЭДС, положительное направление которой совпадает с выбранным положительным направлением тока

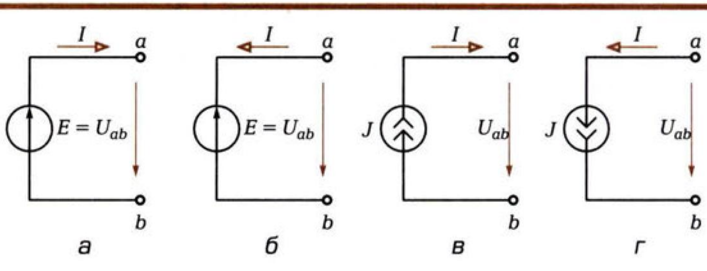


Рис. 2.29

(рис. 2.29, *а*), мощность сторонних сил $P_E = U_{ab}I = EI$. Если направления ЭДС и тока противоположны, то мощность $P_E = -U_{ab}I = -EI$ (рис. 2.29, *б*). Аналогично мощность источника тока $P_J = U_{ab}I = U_{ab}J$, если направления тока в источнике $J = I$ и напряжения между его выводами U_{ab} противоположны (рис. 2.29, *в*). В противном случае мощность $P_J = -U_{ab}I = -U_{ab}J$ (рис. 2.29, *г*).

Идеальные источники ЭДС и тока могут развивать бесконечно большую мощность. Подключим к каждому источнику приемник с сопротивлением нагрузки $R_н$. В первом случае, если $R_н \to 0$, то ток $I \to \infty$ и мощность $P_E = EI \to \infty$, во втором случае, если $R_н \to \infty$, то напряжение $U \to \infty$ и мощность $P_J = UJ \to \infty$.

Мощность источника ЭДС и источника тока может иметь положительное и отрицательное значения, что соответствует передаче энергии источником во внешнюю относительно него цепь и получению им энергии из этой цепи.

В любой электрической цепи должен соблюдаться энергетический баланс — баланс мощностей: *алгебраическая сумма мощностей всех источников энергии (в частности, источников тока и источников ЭДС) равна арифметической сумме мощностей всех приемников энергии (в частности, резистивных элементов)*:

$$\boxed{\sum P_{ист} = \sum P_R.} \tag{2.32}$$

Пример 2.9. Составить баланс мощностей для схемы цепи на рис. 2.17, рассчитанной в примере 2.1.

Решение. Алгебраическая сумма мощностей всех источников энергии равна

$$\sum P_{ист} = E_1I_1 - E_2I_4 + E_3I_6 + E_4I_5 = 1 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 37{,}5 \text{ Вт}.$$

Арифметическая сумма мощностей всех резистивных элементов равна

$$\sum P_R = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 = 4 \cdot 1{,}5^2 + 2 \cdot 3{,}5^2 + 1 \cdot 2^2 = 37{,}5 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей по (2.32) удовлетворяется.

Пример 2.10. Составить баланс мощностей для схемы цепи на рис. 2.27, рассчитанной в примере 2.7.

Решение. Алгебраическая сумма мощностей всех источников энергии равна

$$\sum P_{ист} = E_2I_3 - E_1I_1 + U_{ab}J_1 - U_{bc}J_2 = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 - 1 \cdot 1{,}5 = 21{,}5 \text{ Вт},$$

где напряжения на источниках тока по (2.12) равны $U_{ab} = R_1I_1 + E_1 = 1 \cdot 3 + 5 = 8$ В, $U_{bc} = R_2I_2 = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ В.

Арифметическая сумма мощностей всех резистивных элементов равна

$$\sum P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 0{,}5^2 + 3 \cdot 2^2 = 21{,}5 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей по (2.32) удовлетворяется.

2.15. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В общем случае схемы замещения электротехнических устройств содержат кроме линейных также нелинейные резистивные элементы (см. рис. 2.6).

Нелинейный резистивный элемент (выпрямительные диоды, стабилитроны, варисторы и т. д.) включается в цепь через два вывода. Его свойства определяет вольт-амперная характеристика $I(U)$ (рис. 2.30). Каждая точка ВАХ определяет *статическое*

$$\boxed{R_{\text{ст}} = U/I}$$

и *дифференциальное*

$$\boxed{R_{\text{диф}} = \mathrm{d}U/\mathrm{d}I}$$

сопротивления нелинейного резистивного элемента.

Нелинейные свойства резистивных элементов лежат в основе принципа действия выпрямителей, стабилизаторов напряжения, усилителей и т. п.

Для нелинейных цепей неприменим принцип наложения. Это ограничивает применимость аналитических методов расчета цепей, которые на нем основаны: контурных токов, наложения и др.

Расчет цепей с нелинейными резистивными элементами осуществляется графическими методами.

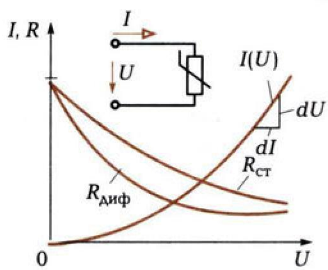


Рис. 2.30

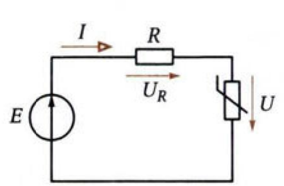


Рис. 2.31

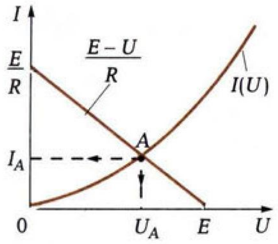


Рис. 2.32

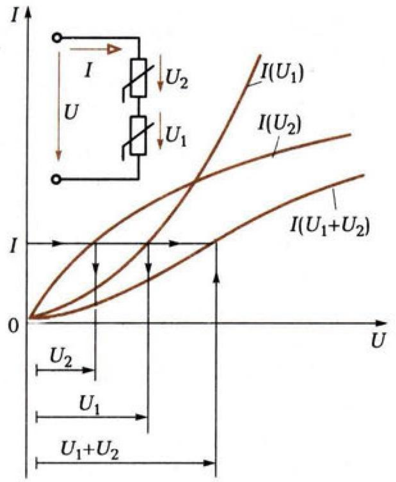


Рис. 2.33

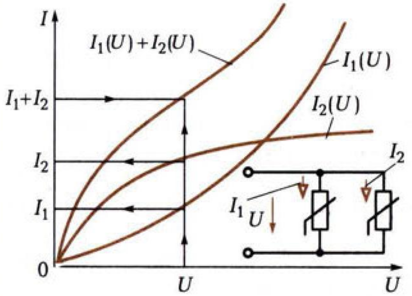


Рис. 2.34

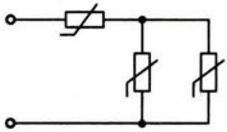


Рис. 2.35

Рассмотрим расчет схемы с последовательным соединением источника ЭДС, линейного R и нелинейного резистивных элементов (рис. 2.31).

На линейном резистивном элементе напряжение по второму закону Кирхгофа равно

$$U_R = E - U, \tag{2.33}$$

а ток по закону Ома с учетом (2.33) равен

$$\boxed{I = U_R/R = \frac{E-U}{R}.} \tag{2.34}$$

Уравнению (2.34) соответствует прямая линия, называемая *нагрузочной характеристикой*, проходящей через точки $U = 0$, $I = E/R$ на оси ординат и $I = 0$, $U = E$ на оси абсцисс. Точка A пересечения нагрузочной характеристики и ВАХ $I(U)$ нелинейного резистивного элемента определяет рабочий режим цепи (рис. 2.32): ток I_A и напряжение U_A. Графический метод расчета нелинейной цепи с помощью нагрузочной характеристики называется *методом нагрузочной характеристики*.

Метод нагрузочной характеристики пригоден и в случаях, если цепь содержит последовательное или параллельное соединение нелинейных резистивных элементов с известными ВАХ. Для этого необходимо в первом случае сложить ВАХ нелинейных резистивных элементов по напряжению (рис. 2.33), а во втором — по току (рис. 2.34). Определив рабочую точку на результирующей ВАХ методом нагрузочной характеристики, далее найдем ток и напряжение каждого нелинейного резистивного элемента.

Аналогично рассчитывается цепь, которая содержит смешанное соединение нелинейных резистивных элементов (рис. 2.35).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под условными положительными направлениями тока и напряжения в электрической цепи?
2. Перечислите свойства источника напряжения и источника тока.
3. Каково назначение принципиальной схемы и схемы замещения электрической цепи?
4. Дайте определения геометрических понятий схемы замещения электрической цепи: ветвь, узел, контур.
5. Почему для расчета нелинейной электрической цепи неприменим принцип наложения?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Определите сопротивление провода из технической меди (данные см. табл. 2.1) при температуре 10 °С, если при температуре 60 °С оно равнялось 5 Ом.

   Ответ: 4 Ом.
2. Определите баланс мощностей в схеме на рис. 2.26, рассчитанной в примере 2.6.

   Ответ: $\sum P_{ист} = \sum P_R = 110$ Вт.
3. Определите методом узловых потенциалов напряжение U_{ab} в схеме на рис. 2.16 при значениях параметров элементов: $E_1 = 10$ В, $E_2 = 0{,}75$ В, $E_3 = 30$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 2{,}5$ Ом, $R_3 = 10$ Ом.

   Ответ: –1 В.
4. Определите ток I_1 в схеме на рис. 2.21, *а*, рассчитанной в примере 2.3, при напряжении $U = 70$ В.

   Ответ: 4 А.